6.1 Bestimmungsstücke zur Konstruktion von Dreiecken – Kongruenzsätze

Was dich erwartet

In einem Bleifenster mit schönem Glasmosaik ist eine dreieckige Scheibe zerbrochen. Beim Glaser wollen wir ein neues Glas zuschneiden lassen. Welche Maße müssen wir mitteilen, damit wir ein Dreieck erhalten, das in Form und Größe genau mit dem alten übereinstimmt? Genügt es, wenn wir die drei Seitenlängen angeben oder müssen wir auch die Winkel ausmessen?

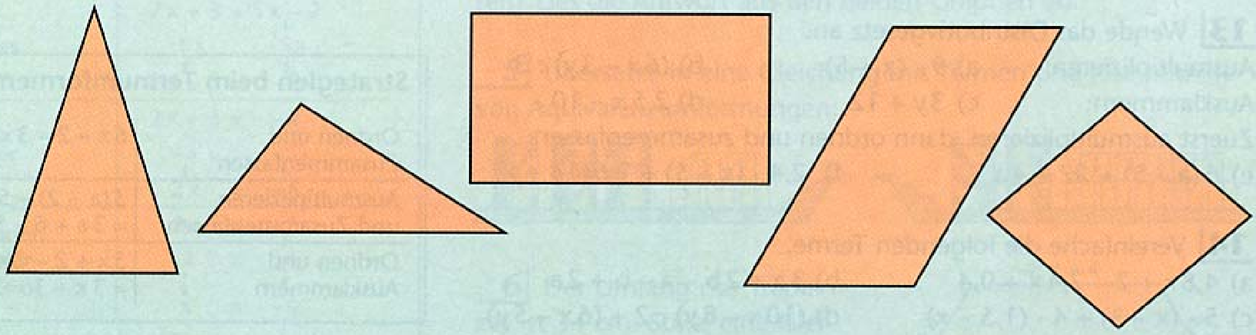
In diesem Lernabschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, wie man mit möglichst wenigen Angaben entscheiden kann, ob eine geometrische Figur genau „deckungsgleich“ (kongruent) mit einer anderen Figur ist und wie man diese konstruieren kann. Die Kongruenz von Dreiecken hat dabei besondere Bedeutung, da man jedes Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen kann.

Aufgaben

1 Konstruiere die Figuren exakt in der angegebenen Form und Größe auf weiße Pappe und schneide sie aus.

Bausteine für ein geometrisches Puzzle

a) Welche Maße der Figuren müssen gemessen werden, damit die Konstruktion gelingt? Versuche mit möglichst wenig Angaben auszukommen. Am besten bewältigt ihr die Aufgabe in Partnerarbeit: einer misst und der andere zeichnet mit den genannten Maßen auf Pappe. Wechselt euch bei den Figuren ab.



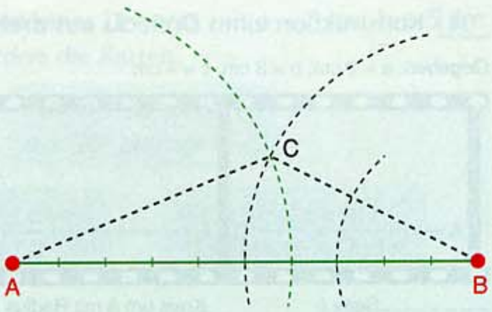
Zur Kontrolle könnt ihr die ausgeschnittenen Pappfiguren auf die Originalteile legen.

b) Vergleicht eure Lösungen mit denen anderer Gruppen. Habt ihr bei manchen Figuren zu viele oder zu wenige Größen gemessen?

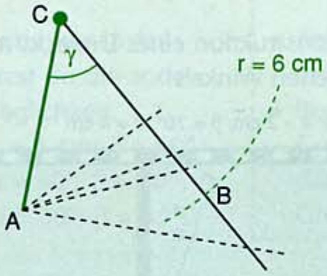
2 Übertrage aus einer passenden Autokarte durch Konstruktion das Städtedreieck Köln – Aachen – Koblenz auf ein DIN-A4-Blatt. Notiere, welche Größen du gemessen hast und beschreibe deine Konstruktion.

Aufgaben

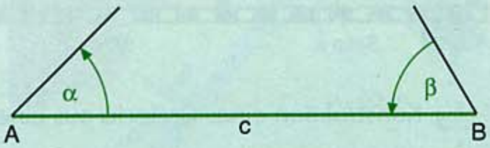
3 Luici hat sich von einem Dreieck die Seitenlängen $\overline{AB} = 10$ cm und $\overline{AC} = 6$ cm gemerkt. Von der Seitenlänge $\overline{BC}$ weiß er nur noch, dass sie entweder 3 cm oder 5 cm beträgt. Nach einem Konstruktionsversuch entscheidet er, dass es 5 cm waren. Kann er sicher sein?



4 *Steckbriefe eines Dreiecks*
$\gamma = 50°$, $\overline{CA} = 5$ cm
a) Zeige, dass es verschiedene Dreiecke zu diesem Steckbrief gibt, die nicht deckungsgleich sind.
b) Weiteres Merkmal: $\overline{CB} = 6$ cm
Ist nun die Konstruktion eindeutig?



5 Katrin misst bei einem Dreieck $c = 8$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.
Ist das Dreieck damit in Form und Größe festgelegt? Begründe.



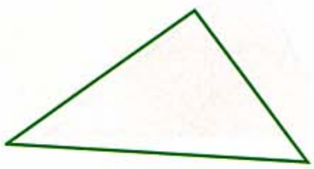
Basiswissen

Figuren, die nach Größe und Form vollständig übereinstimmen, lassen sich durch Verschieben, Drehen und Spiegeln genau zur Deckung bringen. Man nennt sie **deckungsgleich** oder **kongruent**. In der Praxis stellt man kongruente Figuren z. B. mithilfe von Gussformen oder Schablonen her. In der Geometrie kann man sie mithilfe einiger gegebener Größen eindeutig konstruieren. Bei Dreiecken genügt hierfür die Angabe von drei geeigneten Größen.

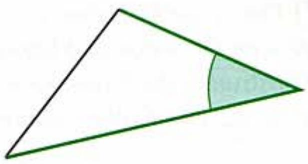
Kongruenzsätze

Ein Dreieck ABC ist eindeutig konstruierbar, wenn

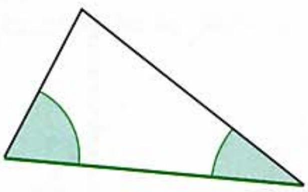
SSS die drei Seitenlängen gegeben sind.

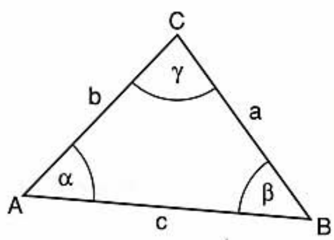


SWS zwei Seitenlängen und das Maß des eingeschlossenen Winkels gegeben sind.



WSW eine Seitenlänge und die Größe der beiden anliegenden Winkel gegeben sind.





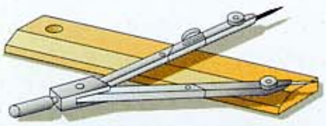
In der Mathematik erfolgen die Bezeichnungen entgegen dem Uhrzeigersinn.

Mathematik (Klasse 7)

Geometrie: „Geometrische Konstruktionen an Dreiecken“

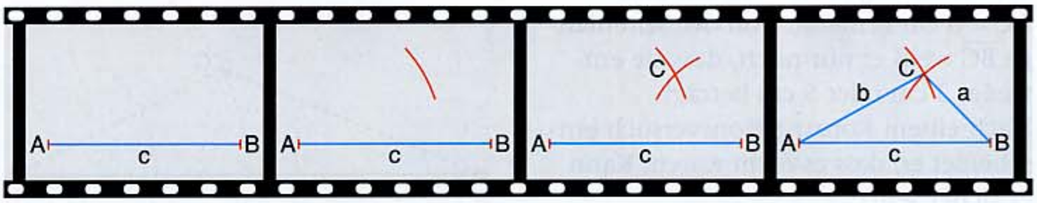
Beispiele

Konstruktion mit
Zirkel und Lineal



A Konstruktion eines Dreiecks aus drei Seitenlängen.

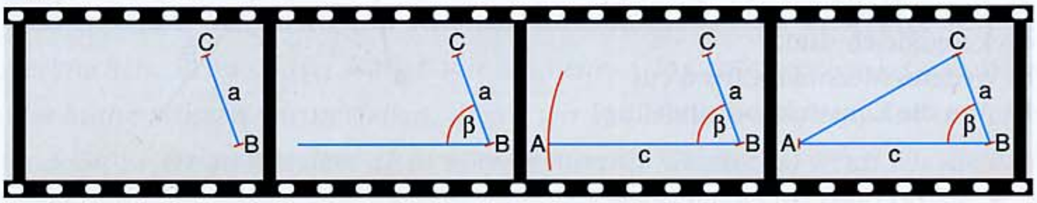
Gegeben: a = 2 cm, b = 3 cm, c = 4 cm



Seite c | Kreis um A mit Radius b | Kreis um B mit Radius a | Dreieck vervollständigen

B Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seitenlängen und dem Maß des eingeschlossenen Winkels.

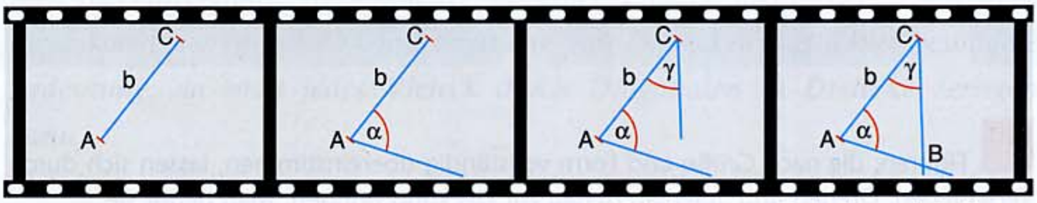
Gegeben: a = 2 cm, β = 70°, c = 4 cm



Seite a | Winkel β | Seite c | Dreieck vervollständigen

C Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seitenlänge und zwei Winkelmaßen.

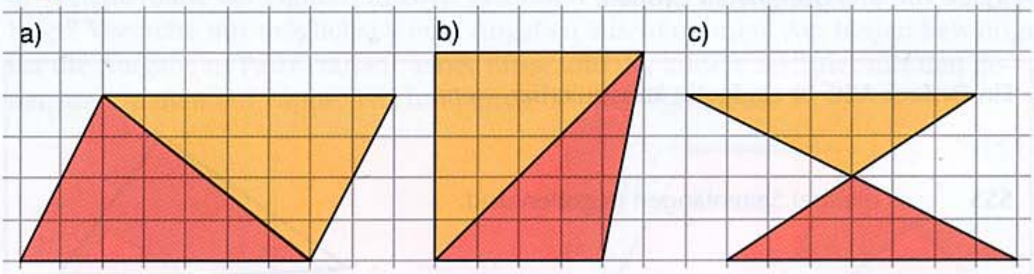
Gegeben: b = 2 cm, α = 70°, γ = 40°



Seite b | Winkel α | Winkel γ | Dreieck vervollständigen

Übungen

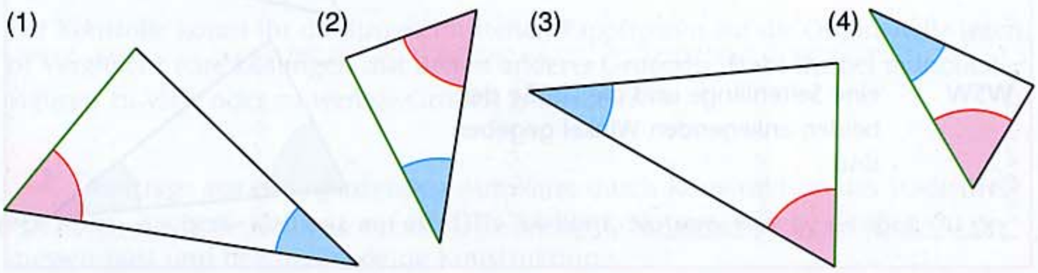
6 Sind die beiden Dreiecke jeweils zueinander kongruent? Begründe.



7 Die Dreiecke haben alle eine Seite der Länge 2,5 cm und Winkel von 35° und 60°.

a) Welche Dreiecke sind kongruent zueinander? Begründe.

b) Konstruiere die Dreiecke in deinem Heft. Bei welchen Dreiecken musst du hierfür eine zusätzliche Größe bestimmen?



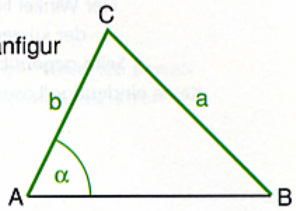
Wenn zwei Winkel gegeben sind, kannst du den dritten Winkel leicht berechnen.

Übungen

8 Mareike hat das Problem der Konstruktion eines Dreiecks mit a = 7 cm, b = 5 cm und α = 30° gelöst und auf Karten notiert. Ordne die Karten.

Seite b = 5 cm zeichnen	Verbinde B und C	In A den Winkel α = 30° abtragen
Kreis um C mit dem Radius a = 7 cm zeichnen	Kennzeichne den Schnittpunkt B	Kennzeichne die Eckpunkte A und C

Planfigur



9 *Zum Training*

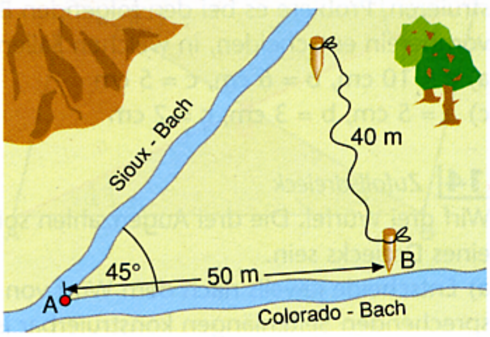
Konstruiere die Dreiecke. Schreibe die einzelnen Schritte wie in Aufgabe 8 auf. Zum Vergleich mit einem Nachbarn solltest du die anderen Größen messen. So hast du eine gute Kontrollmöglichkeit.

a) a = 6 cm; b = 4 cm; c = 8 cm b) a = 8 cm; c = 5 cm; β = 60°
c) c = 5 cm; a = 3,5 cm; b = 4,2 cm d) c = 5 cm; α = 30°; β = 70°
e) a = 6,5 cm; α = 45°; γ = 65° f) b = 5 cm; α = 30°; β = 35°

Strategie

- Zeichne zunächst eine Planfigur und markiere die gegebenen Größen grün.
- Beginne die Konstruktion mit einer Größe. Wenn du nicht weiterkommst, dann kann der Beginn mit einer anderen Größe helfen.

10 Goldgräber Joe bekommt ein dreieckiges Stück Land zugewiesen: Eine Ecke A liegt am Zusammentreffen des Colorado-Baches mit dem Sioux-Bach. Die zweite Ecke B liegt 50 m aufwärts am Colorado-Bach. Die dritte Ecke C liegt 40 m von B entfernt am Sioux-Bach.
Übertrage die Skizze in dein Heft und zeichne das Grundstück ein.



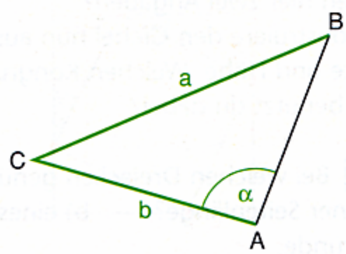
Eine Dreieckskonstruktion mit Wahlmöglichkeiten. Wie wird sich Joe entscheiden?

11 Konstruiere ein Dreieck ABC mit $\overline{AB}$ = 4 cm, $\overline{BC}$ = 5 cm und α = 45°. Vergleiche mit dem Ergebnis aus Aufgabe 10.

Basiswissen

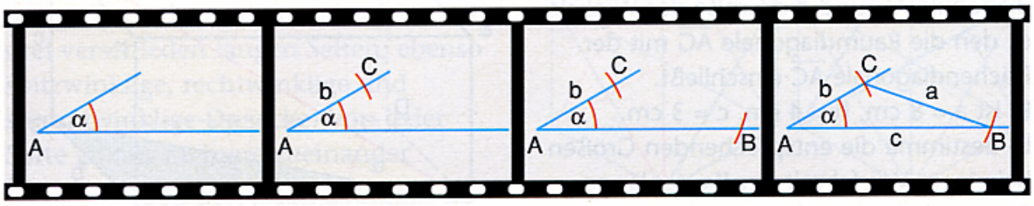
Der Kongruenzsatz SWS garantiert die eindeutige Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Wenn nun zwei Seiten und ein anderer Winkel gegeben sind, so kommt es auf die Lage dieses Winkels an.

SsW Ein Dreieck ist eindeutig konstruierbar, wenn zwei Seitenlängen und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind.



Beispiele

D Konstruktion eines Dreiecks aus a = 3 cm, b = 2 cm, α = 30°.

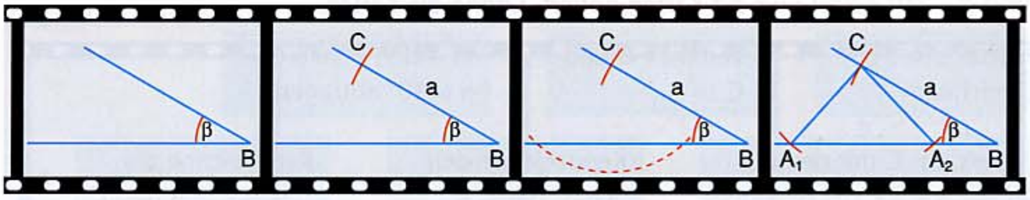


Winkel α Seite b Kreis um C mit Radius a Dreieck vervollständigen

Beispiele

Der Winkel liegt der kürzeren Seite gegenüber: Keine eindeutige Lösung!

E Konstruktion von Dreiecken aus a = 3 cm, b = 2 cm, β = 30°.



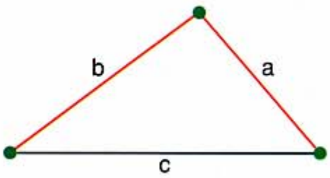
Winkel β | Seite a | Kreis um C mit Radius b | Dreiecke vervollständigen

Übungen

12 Konstruiere Dreiecke aus den gegebenen Größen. Kannst du von vornherein entscheiden, ob die Konstruktion eindeutig ist? In einem Fall ergibt sich überhaupt kein Dreieck. Woran liegt das?

a) b = 4 cm, c = 6 cm und α = 30° b) a = 5 cm, b = 4 cm und α = 30°
c) a = 5 cm, c = 6 cm und α = 30° d) a = 5 cm, c = 2 cm und γ = 80°

Dreiecksungleichung: In einem Dreieck ist die Summe zweier Seitenlängen größer als die dritte Seitenlänge.



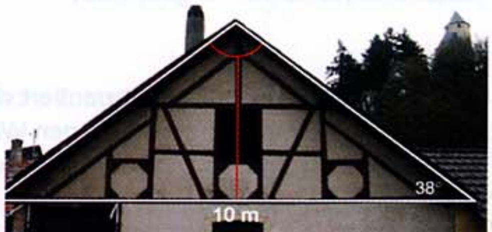
a + b > c

13 Auch aus drei gegebenen Seitenlängen lässt sich nicht immer ein Dreieck konstruieren. Probiere es bei den folgenden Beispielen aus. Kannst du vielleicht schon von vornherein entscheiden, in welchen Fällen die Konstruktion möglich ist? Begründe.

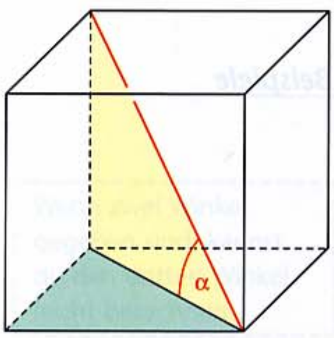
a) a = 10 cm, b = 6 cm, c = 5 cm b) a = 10 cm, b = 4,3 cm, c = 3,8 cm
c) a = 5 cm, b = 3 cm, c = 2 cm d) a = 6 cm, b = 4 cm, c = 1,5 cm

14 *Zufallsdreieck*
Wirf drei Würfel. Die drei Augenzahlen sollen jeweils die Seitenlängen (in cm) a, b, c eines Dreiecks sein.
a) Entscheide jeweils nach dem Wurf von drei Würfeln, ob ein Dreieck mit den entsprechenden Seitenlängen konstruierbar ist.
b) Wie häufig hast du bei 10 Versuchen das Dreieck konstruieren können?

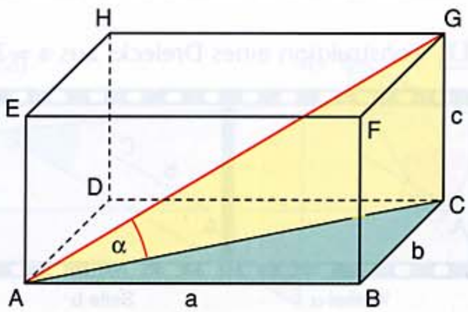
15 a) Konstruiere den symmetrischen Giebel eines Daches mit der Breite 10 m und dem Neigungswinkel 38°. Gib dann die Höhe und den Öffnungswinkel des Giebels an.
b) Welchen Kongruenzsatz hast du bei der Konstruktion benutzt? Warum genügen hier zwei Angaben?
c) Konstruiere den Giebel nun aus der Breite und Höhe. Welchen Kongruenzsatz benutzt du dabei?



16 Bei welchen Dreiecken genügt für die eindeutige Konstruktion die Angabe
a) einer Seitenlänge? b) eines Winkels und einer Seite? c) zweier Seitenlängen?
Begründe.



17 a) Bestimme durch Konstruktion geeigneter Dreiecke die Länge der Raumdiagonale $\overline{AG}$ und die Größe des Winkels α, den die Raumdiagonale $\overline{AG}$ mit der Flächendiagonale $\overline{AC}$ einschließt.
Es ist a = 8 cm, b = 4 cm, c = 3 cm.
b) Bestimme die entsprechenden Größen bei einem Würfel mit der Kantenlänge 5 cm. Gib zuerst Schätzwerte an.



Beispiele

Beispiel für einen Beweis mit Kongruenzsätzen

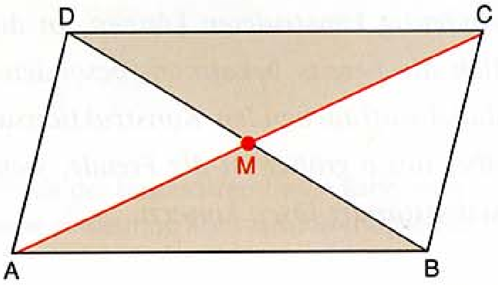
F Beweisen mit Hilfe der Kongruenzsätze

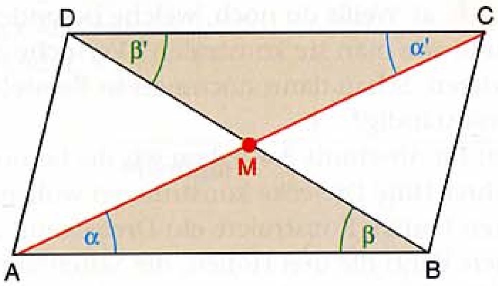
Häufig entdeckt man in Figuren erstaunliche mathematische Zusammenhänge, man ist sich aber nicht sicher, ob die Vermutung immer zutrifft. Manchmal kannst du die Kongruenzsätze zum Beweis benutzen.

Vermutung:

Im Parallelogramm halbiert der Diagonalenschnittpunkt M die Diagonale $\overline{AC}$.

1. Wir zeichnen eine **Planskizze** eines Parallelogramms mit den Diagonalen.
2. **Wir suchen nach kongruenten Dreiecken,** in denen die beiden Diagonalenteile als Seiten vorkommen. Die Dreiecke ABM und DMC kommen infrage.
3. Nun müssen wir **begründen, dass die beiden Dreiecke kongruent sind.** Die Seite $\overline{AB}$ des einen Dreiecks ist genauso lang wie die Seite $\overline{CD}$ des anderen Dreiecks. (Warum?) Die Winkel α und α′ sind Wechselwinkel, ebenso die Winkel β und β′. Der Kongruenzsatz WSW garantiert, dass die beiden Dreiecke kongruent sind.
4. $\overline{AM}$ und $\overline{MC}$ sind **einander entsprechende Seiten** in den beiden kongruenten Dreiecken, sie sind also gleich lang.

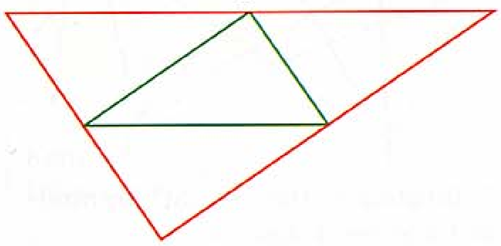




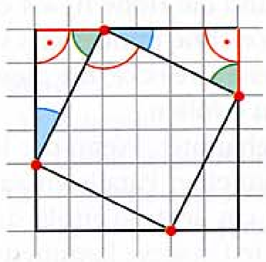
Aufgaben

18 Beweise wie in dem Beispiel F: M halbiert auch die Diagonale $\overline{BD}$.

19 In einem beliebigen Dreieck werden durch die drei Ecken jeweils Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten gezeichnet. Auf diese Weise entsteht ein größeres Dreieck mit vier Innendreiecken. Beweise, dass die vier Innendreiecke kongruent sind.



20 In einem Quadrat werden auf jeder Seite Teilpunkte markiert, die gleich weit von der Ecke entfernt sind. Diese vier Punkte werden miteinander verbunden. Beweise, dass dabei wiederum ein Quadrat entsteht.



21 In der regelmäßigen Sechseckfigur kannst du gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke finden und solche mit drei verschieden langen Seiten; ebenso spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke. Von jeder Sorte gibt es mehrere zueinander kongruente Dreiecke.
Wie viele gibt es jeweils? Begründe.